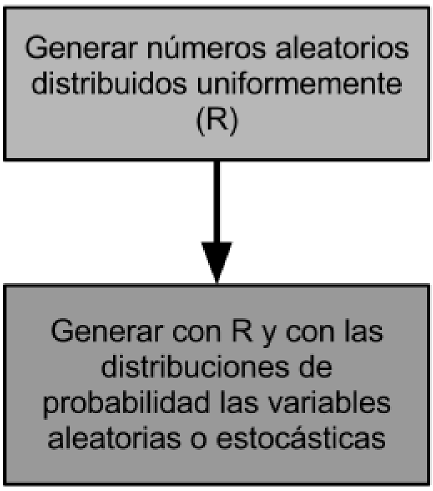
GENERACION DE VARIABLES ALEATORIAS

Introducción

La generación de variables aleatorias significa la obtención de variables que siguen una distribución de probabilidad determinada.

Esto es, hasta ahora se trataron los datos observados y se encontró que los mismos ajustan a una distribución de probabilidad. Ahora, con esta función de distribución de probabilidad se generan datos (matemáticamente o por medio de simulación) que siguen dicha distribución, entonces, los mismos representan los datos reales.

La generación de variables estocásticas o aleatorias requiere de dos etapas:



¿Por qué se usa la generación de variables aleatorias?

¿Cómo se puede simular el tiempo en que tarda un empleado en atender a un cliente, sabiendo que en la realidad estos tiempos no son fijos, que en determinados momentos se forma una cola de espera, o que el tiempo entre arribos de los clientes al lugar del servidor es aleatorio?

¿Cómo se puede obtener el tiempo de atención de un empleado en un supermercado en una simulación, sabiendo que hay una distribución de probabilidad de tiempos de atención del empleado o servidor?

Para resolver estos problemas, se requiere generar números aleatorios distribuidos uniformemente (o números pseudoaleatorios), y con ellos y la distribución de probabilidad a la que se ajustan los datos obtenidos del sistema real, obtener los valores simulados de la variable de interés.

Hay técnicas como el método de la transformada inversa, el método de rechazo, el método de la composición, el método de caracterización entre otros.

Números aleatorios y sus propiedades.

Una secuencia de números aleatorios R_1, R_2,... debe tener dos importantes propiedades estadísticas: uniformidad e independencia.

Cada número aleatorio R_i es una muestra independiente tomada de una distribución continua uniforme entre cero y uno. Esto es, la función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)}, \qquad a > 0, b > 0$$

Como consecuencia de las propiedades de uniformidad e independencia se tiene que:

- Si el intervalo (0, 1) es dividido en n clases, o sub-intervalos de longitudes iguales, el número esperado de observaciones en cada intervalo es N/n, donde *N* es el número total de observaciones.
- La probabilidad de observar un valor en un intervalo en particular es independiente de los valores previamente observados.

Generadores de números pseudoaleatorios

Introducción

Algunos métodos usan dispositivos físicos para generar números con igual probabilidad de ocurrencia (tirada de una moneda, de un dado, giro de un disco, etc.). Ciertos dispositivos físicos sofisticados asocian señales que se generan por algún fenómeno con números que tienen la particularidad de formar una serie de largo ciclo en donde ninguno de los números generados se repite.

Como este método es costoso y poco práctico se prefiere generar estos números mediante técnicas numéricas por lo que se los conoce como números pseudoaleatorios. Dichas técnicas son los generadores de números aleatorios, que no reproducen rigurosamente los números tal como lo hacen las máquinas, pero son fáciles de implementar y programar (de hecho las aplicaciones que hacen cálculos numéricos o simulaciones tienen sus propios generadores) teniendo en cuenta algunas consideraciones que se describen a continuación.

Características de las técnicas numéricas generadoras de números pseudoaleatorios:

- Los números deben estar uniformemente distribuidos entre 0 y 1.
- Deben ser independientes uno de otro (no debe existir correlación).
- Deben tener ciclos largos antes que la secuencia se repita. La longitud de un ciclo es la cantidad de números aleatorios en una secuencia antes de la repetición de la próxima secuencia similar.
- El generador debe ser rápido y no requerir excesiva memoria de cálculo.

Tipos de generadores de números seudoaleatorios

Hay técnicas numéricas de generación de números pseudoaleatorios, que a continuación se describen.

Método de cuadrados medios

Es simple pero con performance pobre. El método consiste en:

1. Seleccionar un entero de n dígitos denominado semilla (seed).
2. Encontrar el cuadrado del número: si el número de dígitos del resultado es menor que 2n, se agregan ceros a la izquierda del número hasta completar 2n dígitos.
3. Tomar los n dígitos centrales del número calculado en 2.
4. Situar un punto o coma decimal antes del primer dígito del número calculado en 2. Así se obtiene un número aleatorio.
5. Tomar el número encontrado como nueva semilla y repetir el proceso a partir de 2.

Ejemplo:

Sea la semilla = 5625

$S_1 = (5625)^2 = 31640625$ $R_1 = 0,6406$

$S_2 = (6406)^2 = 41036836$ $R_2 = 0,0368$

$S_3 = (0368)^2 = 00135425$ $R_3 = 0,1354$

Etc.

Método Congruencial Lineal

Utiliza la ecuación recursiva con números aleatorios generados en cada iteración:

$$Z_i = (aZ_{i-1} + c)\ mod\ m$$

$$R_i = \frac{Z_i}{m}$$

Z_0 : Semilla
A, c y m son enteros no negativos y deben satisfacer que m > 0, a < m, c < m y $Z_0 < m$

Si la constante c es cero el generador es congruencial lineal multiplicativo. Si tiene la fórmula completa es congruencial lineal mixto.

La primera parte de la ecuación es la operación de división modular, o sea que lo que se calcula en el paréntesis se divide por m y el resto es el valor buscado de Z_i. Posteriormente se divide este resto por el módulo para obtener el número aleatorio R

Ejemplo

Sean la semilla $Z_0 = 1$; y las constantes a = 6; c = 1; m = 25

Z_1 = (6x1+1)mod 25	Z_1=7	R_1 = 7/25=0,28
Z_2 = (6x7+1) mod 25	Z_2=18	R_2 = 18/25=0,72
Z_3 = (6x18+1)mod 25	Z_3=9	R_3 = 9/25=0,36

Etc.

Si en lugar de a=6 se toma a=5

Z_1 = (5x1+1)mod 25	Z_1=6	R_1 = 6/25=0,24
Z_2 = (5x6+1)mod 25	Z_2=6	R_2 = 6/25=0,24
Z_3 = (5x6+1)mod 25	Z_3=6	R_3 = 6/25=0,24

Etc.

Esto demuestra que los parámetros deben ser cuidadosamente seleccionados. Pero además los generadores deben pasar las pruebas o test de aleatoriedad, tales como chi-cuadrado y Kolmogorov Smirnov, etc.

Generación de variables aleatorias continuas y discretas

Método de la Transformada Inversa

Se utiliza la función de distribución acumulada F(x), que está definida entre 0 y 1. Los números aleatorios distribuidos uniformemente tienen valores entre 0 y 1.

Si representamos un número aleatorio con R, entonces $R = F(x)$ y $x = F^{-1}(R)$

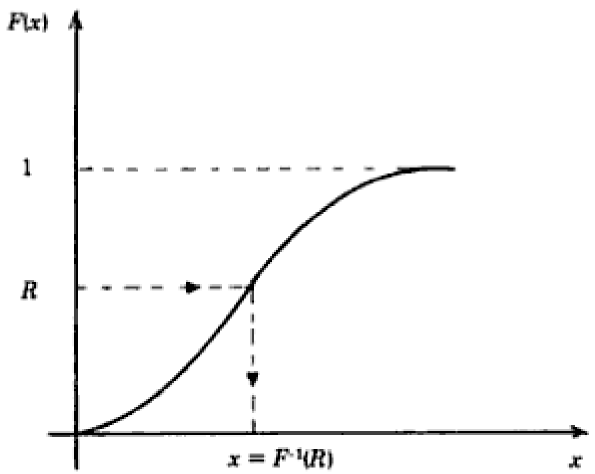
Es por esto que se denomina al método como el de la transformada inversa: dada una función acumulada de una distribución, se obtiene el valor de la variable.

Prueba: si F(x) es invertible,

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(R) \leq x) = P\big(R \leq F(x)\big) = F(x)$$

Gráficamente la idea es:



Aplicación del método de la transformada inversa para distribuciones estándares

Distribución exponencial

La función de distribución de probabilidad es:

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad \forall x > 0$

La función acumulada de la distribución exponencial es:

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

Igualando a R:

$$1 - e^{-\lambda x} = R$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - R$$

$$-\lambda x = \ln(1 - r)$$

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-R)$$

Como R tiene una distribución uniforme, (1-R) también, entonces puede simplificarse la expresión anterior a:

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(R) = -Tln(R)$$

Distribución uniforme continua

La función de distribución de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)}, & a \le x \le b \end{cases}$$

La función acumulada de la distribución continua es:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{\mathrm{x-a}}{\mathrm{b-a}}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Igualando a R:

$$R = \frac{\mathrm{x-a}}{\mathrm{b-a}}$$

$$x = R(b-a) + a$$

Otras distribuciones

$f(x) = 2x, \qquad 0 \le x \le 1$

Integramos e igualamos a R:

$$F(x) = \int_o^x 2x\,dx = 2\frac{x^2}{2}\bigg|_o^x = x^2$$

$$R = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{R}$$

Pero como x está definida entre 0 y 1, la ecuación es:

$$x = \sqrt{R}$$

Distribuciones discretas

Para las funciones de distribución discretas, se tiene:

$P(x_i) = r_i, \qquad i = 1,2,3, \dots, n$

$$F(x) = P(X \le x_i) = \sum_{\forall x_i \le x} p(x_i), \qquad i = 1,2,3,\ldots,n$$

Se genera R y se lo compara en el intervalo:

$$F(x_{i-1}) = r_{i-1} \le R \le r_i = F(x_i)$$

Se busca el entero positivo tal que U ≤ F(x), y se retorna el valor de $X=x_i$

Ejemplo: sean las siguientes distribuciones:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.5, & 0 \le x < 1 \\ 0.8, & 1 \le x < 2 \\ 1, & 2 \le x \end{cases}$$

x	p(x)	F(x)
0	0,5	0,5
1	0,3	0,8
2	0,2	1

Entonces:

$$x = F^{-1}(r) = \begin{cases} 0, & R \le 0.5 \\ 1, & 0.5 < R \le 0.8 \\ 2, & 0.8 < R \le 1 \end{cases}$$

Si R = 0,73, entonces 0,5 < 0,73 < 0,8, x = 1

p(0)	p(X=0)	F(x)
0	0,5	0,5
1	0,3	0,8
2	0,2	1

Ventajas y desventajas de la transformada inversa

La desventaja de este método es que se necesita tener la expresión de $x=F^{-1}(R)$, la que no es siempre fácil de encontrar. De todas maneras puede trabajarse con tablas de números e interpolar, de hecho esto es lo que hacen algunos simuladores como el GPSS : se le ingresa F(x) vs x como tabla numérica, le asigna un valor R a F(x) e interpola en la tabla para obtener x; el método de interpolación depende de que la función sea continua o discontinua, lo que también hay que especificarle.

Método del rechazo

El método sirve para generar variables aleatorias en las que x está acotada en un intervalo $[a, b]$, $a \le x \le b$. Se utiliza la función distribución de probabilidad $f(x)$ y el concepto de moda:

M = máximo valor de f(x) $\Rightarrow$ f(x) acotada.

Es un método iterativo para generar cada valor de x. Como paso previo hay que dividir todos los valores de la función por la moda, implica escalonarla entre 0 y 1, de manera de asociarla con los números pseudoaleatorios.

El procedimiento para generar variables aleatorias es el siguiente:

1. Generar 2 números aleatorios uniformemente distribuidos R_1 y R_2 , ambos entre [0,1]
2. Determinar x de acuerdo a:
$$x = a + (b - a)R_1$$
3. Evaluar:
$$\frac{f(x)}{M} = \frac{f[a + (b - a)R_1]}{M}$$
4. Determinar si se cumple que:
$$R_2 \leq \frac{f[a + (b - a)R_1]}{M}$$
5. Entonces evaluamos el resultado:
    a. Si la respuesta es sí, entonces x es el valor de la variable aleatoria, y x es aceptado.
    b. Si la respuesta es no, entonces x es rechazado, y hay que volver a comenzar desde el paso 1.

La teoría sobre la que se basa el método es que la probabilidad de que $R_2 \leq f(x)/M$ es $f(x)/M$ entonces si esto se cumple y x fue elegido de acuerdo a la expresión acumulativa de la distribución uniforme ($x = a + (b - a)R$), entonces x pertenece a $f(x)$.

En el caso particular en que todos los valores de x fueran aceptados, entonces se tendría distribución uniforme.

Una de las desventajas del método es que el número esperado de intentos para que x sea aceptada es M, entonces si M es grande, aumenta la ineficiencia.

Otros métodos de Generación de Números Aleatorios

Método de composición-descomposición

Se basa en la idea de dividir la f(x) original en una combinación de f_i (x) cuya selección se hace en base a minimizar el tiempo de computación requerido.

Algoritmo:

- Dividir la f(x) original en sub-áreas.
- Definir una distribución de probabilidad para cada sub-área: $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_i(x), \ldots, f_n(x)$.
- Expresar la distribución original como: $f(x) = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + A_3 f_3(x) +, \ldots A_i f_i(x) + \ldots A_n f_n(x)$. Además $\Sigma A_i = 1$.
- Obtener la distribución acumulada de las áreas
- Generar dos números aleatorios uniformemente distribuidos, R_1 y R_2.
- Con R_1 entrar a la distribución acumulada de las áreas (por el eje y) y seleccionar cuál f_i (x) se va a usar (método de la transformada inversa).
- Utilizar R_2 para simular x por el método de la transformada inversa con f_i (x).
- Repetir generando nuevos pares de números aleatorios.

Método de Convolución

Si la variable aleatoria x es la suma de n variables aleatorias:

$$x = y_1 + y_2 + \cdots y_n$$

Cualquier variable se genera sumando las y variables generadas. Por ejemplo, una variable de una distribución k de Erlang es la suma de k variables exponenciales. Entonces se generan k variables exponenciales y se las suman. La pdf de x se obtiene analíticamente a partir de una convolución de pdfs de las y_n.

Método de Caracterización

Las distribuciones con características especiales se generan mediante algoritmos especializados.

Distribución normal

Para generar variables aleatorias a partir de la función de distribución normal, considera la ventaja del teorema central del límite que asegura que la suma de k variables aleatorias independientes y distribuidas idénticamente con una media μ y una varianza σ^2 es aproximadamente distribuida normalmente con media nμ y variancia $n\sigma^2$.

Entonces si se toman k números aleatorios entre 0 y 1 con media 0,5 y varianza 1/12 (porque la media de una distribución uniforme continua es (a+b)/2 y la variancia es $(b-a)^2/12$, entonces para a = 0 y b = 1 se tienen los valores de media 0,5 y varianza 1/12), entonces la variable aleatoria se calcula como:

$$x = \sum_{i=1}^{k} R$$

Y tiene una distribución normal con media 0,5 k y varianza k/12.

La variable normal Z estándar se define entonces como:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{k} R_i - 0.5k}{\sqrt{k/12}}$$

Cuando k aumenta mejora la aproximación, pero aumenta el tiempo de cálculo, por lo que un valor razonable de k es 12, y entonces:

$$Z = \sum_{i=1}^{12} R_i - 6$$

Y como se quiere una variable normal X con media μ y desviación normal σ, se calcula con la ecuación:

$$x = \sigma\left(\sum_{i=1}^{12} R_i - 6\right) + \mu, \qquad 0 \leq R \leq 1$$

Distribución de Poisson

Para una distribución de Poisson, con tiempos entre arribos distribuidos exponencialmente con media 1/λ, el número de arribos n sobre un período dado T tiene una distribución de Poisson con parámetro λ (llegadas/unidad de tiempo). Para generar una variable con distribución de Poisson, se suman las variables generadas exponencialmente hasta que la suma exceda el valor de T y se retorna el número de variables generadas como variable de Poisson.

La función de Poisson es:

$$p(x, \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2, \ldots., n$$

Los intervalos entre arribos de las llegadas de Poisson (discreta) tienen una distribución exponencial (continua). Podemos decir que si los tiempos entre arribos antes del arribo n son variables exponenciales T_1, T_2, T_x, la siguiente ecuación indica que hay exactamente N=n arribos durante Δt:

$$\sum_{j=0}^{x} T_j \leq \Delta t \leq \sum_{j=0}^{x+1} T_j, \qquad x = 0,1,2, \ldots, n$$

Siendo $T_j = -1/\lambda \log R_j$ por transformada inversa, entonces :

$$-\sum_{j=0}^{x} \frac{1}{\lambda} \ln R_j \leq \Delta t \leq -\sum_{j=0}^{x+1} \frac{1}{\lambda} \ln R_j$$

Por propiedades de los logaritmos:

$$\prod_{j=0}^{x+1} R_j \leq e^{-\lambda \Delta t} \leq \prod_{j=0}^{x} R_j$$

y es la misma expresión que la primera desigualdad.

Algoritmo de generación de variables discretas de Poisson:

1. Se tiene un contador en 1 (s = 1), se calcula $A = e^{-\lambda\Delta t}$ y se hace x = 0
2. Se genera R
3. Se hace S=S.R
4. Si S > A, x=x+1 y se repite desde 2.
5. Si S<A, x es la variable de Poisson.

Ejemplo: se quiere generar una variable aleatoria de Poisson cuyo parámetro es la velocidad de arribos $\lambda=2$

Primera iteración
$\lambda=2$, $\Delta t=1$; $A= e^{-2} = 0{,}135$; S =1; x = 0
R = 0,453
S = 1 x 0,453 =0,453
S > A (0,453 > 0,135), x = 0 +1 = 1

Segunda iteración
$A= e^{-2} = 0{,}135$;
R = 0,721
S = 0,453 x 0,721 = 0,327
S > A (0,327 > 0,135), x = 1 +1 = 2

Tercera iteración
$A= e^{-2} = 0{,}135$;
R = 0,294
S = 0,327 x 0,294 = 0,096
S < A (0,096 < 0,135), x = 2 es la variable de Poisson

Entonces, para un intervalo de tiempo con distribución exponencial λ = 2 arribos/seg (Δt = 1 seg), se producen 2 arribos.

Consejos para elegir un algoritmo determinado

A continuación se establecen ciertos principios para poder elegir un algoritmo para generar variables aleatorias:

1. Si la función es invertible, usar transformada inversa.
2. Si la función no es invertible, el método de rechazo o el método de caracterización para distribuciones normales o de Poisson.
3. Los métodos de convolución y composición se usan para casos especiales.

Simulación de Montecarlo

Introducción

El método utiliza esencialmente los métodos de generación de variables aleatorias a partir de distribuciones de probabilidad. Es una simulación estática, no evoluciona con el tiempo, sino que analiza un sistema con variables estocásticas.

Se utiliza mucho para evaluar incertidumbres o riesgos. Hay productos comerciales en ese sentido como el @Risk, Cristal Ball, etc.

Las etapas para una simulación de Montecarlo

Las etapas consisten en:

1. Diseñar el modelo lógico de decisión
2. Especificar distribuciones de probabilidad para las variables aleatorias relevantes.
3. Incluir posibles dependencias entre variables.
4. Muestrear valores de las variables aleatorias
5. Calcular el resultado del modelo según los valores del muestreo (iteración) y registrar el resultado
6. Repetir el proceso hasta tener una muestra estadísticamente representativa
7. Obtener la distribución de frecuencias del resultado de las iteraciones
8. Calcular media, desvío y curva de percentiles acumulados

Ejemplo de aplicación de la simulación de Montecarlo

Sea el caso de la elaboración de panes: se pueden hacer lotes de 12 panes, con un costo de cada pan 0,25 $. La demanda diaria es de a múltiplos de 12, variando entre 3 a 8. El precio de venta es de 0,40 $ el pan, con un remanente diario a 0,10 $ el pan. El costo de ganancia perdida es de 0,15 $ por pan (demanda mayor que oferta y clientes compran a competidores)

Objetivo del problema: conocer el número óptimo de panes para maximizar la ganancia:

Ingresos – costos de fabricación – costo de ingresos perdidos

Para simular hay que hacer una evaluación de distintas políticas como el número de panes a hornear diariamente. Cada política se evalúa en un tiempo fijo y se elige la que da mayor ganancia.

Parámetros:

- Tipo de demanda diaria: alta, media, baja
- Distribución: 30 % (alta), 45 % (media) y 25 % (baja)

Distribución de demandas por categoría

Estimación de demanda: si la demanda es alta, media o baja se calcula la distribución de probabilidad acumulada y se asignan los intervalos de los números aleatorios.

Demanda	alta	Intervalos de R	Media	Intervalos de R	Baja	Intervalos de R
36	0,05	0 - 0,04	0,1	0 - 0,09	0,15	0 - 0,14
48	0,15	0,05 - 0,14	0,3	0,1 - 0,29	0,4	0,14 - 0,39
60	0,4	0,15 - 0,39	0,6	0,3 - 0,59	0,75	0,4 - 0,74
72	0,7	0,4 - 0,69	0,85	0,6 - 0,84	0,9	0,7 - 0,89
84	0,9	0,7 - 0,89	0,95	0,85 - 0,94	0,95	0,9 - 0,94
96	1	0,9 - 1	1	0,95 - 1	1	0,95 - 1

Tabla 1: Intervalos de R para las demandas

Tipo de Demanda	Probabilidad f(x)	Probabilidad acumulada F(x)	Rango de números aleatorios R
Alta	0,3	0,3	Entre 0 y 0.29
Media	0,45	0,75	Entre 0.3 y 0.74
Baja	0,25	1	Entre 0.75 y 1

Tabla 2: Probabilidades según tipo de demanda

Se elige un número R al azar y se busca el intervalo donde está incluido. Se busca luego la correspondencia con la probabilidad de que la demanda sea alta, media o baja.

Estimación de la cantidad de panes

Sea un R=0,47 para estimar el tipo de demanda. Buscando en la tabla 2, corresponde a demanda media.
Sea otro R=0,82 para estimar la demanda diaria de una demanda media. Buscando en la tabla 1, corresponde a 72 panes.
Así puede simularse la política de fabricación de panes diarios.

Costos

Si la política de elaboración es de 60 (variable X_1) panes diarios y si la demanda es de 72 (X_2) panes diarios, se tienen:
Ingresos= 60*0,4 = 24 $
Costo de fabricación= 60*0,25 = 15 $
Costo de ingresos perdidos= 12*0,15 = 1,8 $
Utilidad neta = 24 – 15 – 1,8 = 7,2 $
Ingresos–costos de fabricación – costo de ingresos perdidos =0,4 X_1 – 0,25 X_1 – 0,15(X2 - X_1)
Para cada política (números de panes diarios a elaborar) se simula durante varios días y luego se estiman los promedios y las estadísticas. Sugerencia: hacerlo para 15 días o más.

Resultados

Esta simulación se puede hacer para distintas políticas de manera de estimar la más conveniente.
En la tabla se observan datos para 10000 días de simulación de cada política, siendo la más conveniente la de fabricar 72 panes por día.

Política	Números de panes diarios	Utilidad diaria promedio	
		Exacta	Simulada
A	36	1.270	1.270
B	48	4.347	4.349
C	60	6.435	6.436
D	72	6.917	6.915
E	84	6.102	6.104
F	96	4.643	4.642

Bibliografía

"Discret-Event System Simulation", Jerry Banks, John S. Carson II, Barry Nelson, Fifth Edition, Ed. Prentice-Hall, (2010).